10 Octobre 2003

Mécanique I

Alain Blondel, Thierry Baertschiger, Arno Straessner

EXAMEN ECRIT

(Le barème est établi de telle sorte qu'un élève ayant fait correctement deux des trois problèmes aura le note maximum.)

Exercice 1. Relativité - Mesure de la masse du neutrino (barème: 2,5 points)

Le neutrino est une particule neutre introduite en 1930 par Pauli pour expliquer le paradoxe apparent de la désintégration beta, dans laquelle un noyau N se désintègre en donnant un autre noyau P et un électron. On faisait tout d'abord l'hypothèse que la désintégration se faisait ainsi.

$$N \rightarrow P + e^-$$

N et P peuvent être un neutron et un proton ou deux autres noyaux. Par ex le tritium (deux neutrons et un proton) et l'hélium-3 (deux protons et un neutron).

A.1 Ceci est une désintégration à deux corps. On suppose que le noyau N, de masse m_N est à l'arret. Ecrire son quadrivecteur relativiste.

A.2 Si $\vec{p}_P$ et $\vec{p}_e$ sont les quantités de mouvement du noyau P et de l'électron, E_P et E_e leurs énergies, écrire leurs quadrivecteurs et les relations de conservation de l'énergie-impulsion.

A.3 Déterminer l'énergie de l'électron et l'ecrire en fonction de la masse des deux noyaux et de la masse de l'électron. Vérifier qu'elle est indépendante des angles de désintégration et donc constante.

En pratique on observe dans la désintégration beta un spectre d'énergies variable de désintégration en désintégration et qui va jusqu'à une valeur maximale proche de la valeur ci dessus. L'explication de Pauli est la suivante. La désintgration se passe en fait ainsi:

$$N \rightarrow P + e^- + \nu$$

ou ν est une nouvelle particule invisible appelée neutrino, dont la masse m_ν est très petite – ou même nulle.

B.1 Expliquer qu'on peut se ramener au calcul précédent en considérant la masse invariante du système formé du noyau P et du neutrino $\{P,\nu\}$, qu'on écrira $M_{P\nu}$.

B.2 Quelle est l'énergie la plus petite possible pour l'électron?

B.3 Quelle est la plus petite masse invariante possible pour le système $\{P,\nu\}$?

B.4 En déduire l'énergie maximale de l'électron. Calculer l'énergie maximale dans le cas ou la masse du neutrino est nulle et dans le cas ou la masse du neutrino est différente de zéro, et exprimer la différence entre ces énergies de la façon la plus simple possible.

B.5 Application numérique: calculer l'énergie maximale d'électron pour $m_\nu = 0$ et $m_\nu = 10$ eV/c^2 dans les deux cas suivants.

- cas I – neutron et proton: $m_N = 938{,}565$ MeV/c^2, $m_P = 938{,}272$ MeV/c^2, $m_e = 0{,}511$ MeV/c^2
- cas II – tritium et hélium: $m_N = 2809{,}4314$ MeV/c^2, m_P= 2809,4130 MeV/c^2, $m_e = 0{,}511$ MeV/c^2

On donnera la différence ci dessus pour m_ν=0 et m_ν=10 eV/c^2.

Exercice 2. Goutte d'eau (barème: 2,5 points)

Une goutte d'eau tombe d'un nuage. Dans sa chute, elle est en contact permanent avec de la vapeur d'eau. Cette dernière se condense sur la goutte et la fait grossir. On suppose que la masse M de la goutte augmente d'une masse $m = \frac{dM}{dt}$ à chaque seconde et que les frottements sont négligeables.

1. En utilisant l'équation de Newton: $\dot{p} = F$, déterminer l'équation différentielle décrivant l'évolution de la vitesse v de la goutte en fonction du temps.

2. Résoudre l'équation en supposant qu'initialement ($t = 0$) la masse de la goutte est M_0 et que sa vitesse est nulle. Pour cela, on propose la méthode suivante:

   (a) Démontrer que c'est une équation différentielle linéaire du premier ordre, c'est-à-dire du type:

   $$f(t)\dot{v} + g(t)v = h(t).$$

   (b) Déterminer une solution particulière de cette équation. Essayer une solution du type $v(t) = at + b$ avec a, b des constantes. On dénotera par v_p la solution obtenue.

   (c) Déterminer la solution de l'équation homogène associée. Dénoter par v_g la solution obtenue.

   Rappel: Si l'équation est $f(t)\dot{v} + g(t)v = h(t)$, l'équation homogène associée est $f(t)\dot{v} + g(t)v = 0$.

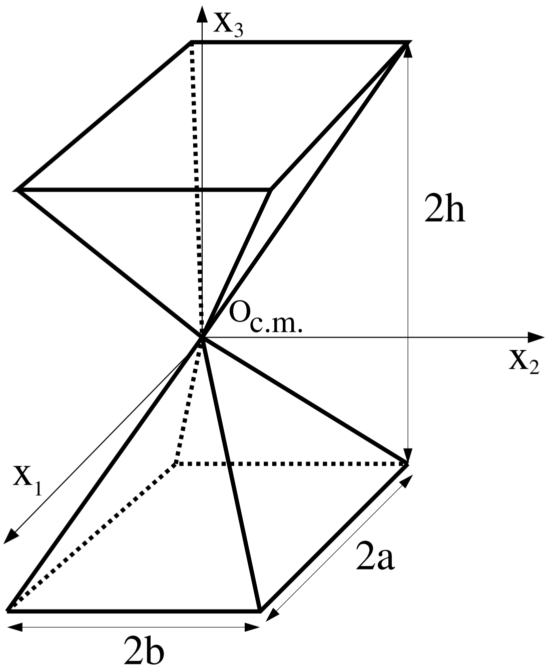
   (d) Démontrer que la somme $v_s(t) \equiv v_g(t) + v_p(t)$ est la solution que l'on cherche. Pour cela, démontrer qu'elle est bien solution de l'équation que l'on cherchait à résoudre et qu'il est possible de s'adapter aux conditions initiales en jouant avec les constantes d'intégration.

3. Faire un graphique approximatif de cette vitesse en fonction du temps.

4. Déterminer la distance parcourue par la goutte après un temps t.

Exercice 3. Tenseur d'inertie - Rotation d'une double-pyramide (barème: 2,5 points)

On considére l'objet dessiné sur la figure: c'est une double-pyramide. On est capable de mesurer ses dimensions h, a, b et sa masse M.



1. Calculer le tenseur d'inertie I_{ij} $(i, j = 1, \ldots, 3)$ de la double-pyramide par rapport de son centre de masse, $O_{c.m.} = (0, 0, 0)$. Exprimer le resultat en fonction de h, a, b et M.
   La distribution de densité $\rho(x_1, x_2, x_3)$ de la double-pyramide est définie par les relations:
$$\rho(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} M/V & \text{pour} \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{a}{h}x_3 \le x_1 \le \frac{a}{h}x_3 \\ -\frac{b}{h}x_3 \le x_2 \le \frac{b}{h}x_3 \\ -h \le x_3 \le h \end{array} \right\} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \qquad (1)$$
   avec $h > a > b$.
   Remarque: Le volume d'une pyramide est égal à $V_{\text{pyramide}} = \frac{1}{3}Ah$ où A est l'aire de la base et h la hauteur.

2. Que peut on dire de ce tenseur? Que valent les moments principaux d'inertie, I_1,I_2 et I_3? Quel sont les axes principaux correspondants?

3. L'objet tourne avec une vitesse angulaire $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ autour du centre de masse. Ecrire les équations de mouvement en absence des moments de force exercés sur le solid ($\vec{M} = 0$, mouvement libre).

4. Maintenant la double-pyramide tourne autour d'un des ses axes principaux, i, à une vitesse angulaire ω_i.

Mais le mouvement est légèrement perturbé. Il y'a donc une petite rotation parasite autour de chacun des deux autres axes avec des vitesse angulaires ω_j et ω_k, telle que:

$$\omega_i \gg \omega_j \tag{2}$$
$$\omega_i \gg \omega_k \tag{3}$$
$$\omega_j \approx 0 \tag{4}$$
$$\omega_k \approx 0 \tag{5}$$

On sera amené à considérer une rotation autour de chacun des axes de telle sorte que (i, j, k) sera égal à $(1, 2, 3)$ ou $(2, 3, 1)$ ou $(3, 1, 2)$.

Montrer que la composante i de $\vec{\omega}$ est constante (dans cette approximation) et que les équations de mouvement peuvent être ré-ecrites dans la forme:

$$\dot{\omega}_j + \alpha_1 \omega_k = 0 \tag{6}$$
$$\dot{\omega}_k + \alpha_2 \omega_j = 0 \tag{7}$$

avec des constantes $\alpha_1 = \alpha_1(\omega_i, I_1, I_2, I_3)$ et $\alpha_2 = \alpha_2(\omega_i, I_1, I_2, I_3)$.

5. Ecrire les solutions de ce système d'équations. Trouver les conditions pour I_1, I_2 et I_3 pour lesquelles le mouvement est stable (mouvement oscillant) ou instable (solutions exponentielles).

6. En utilisant la relation $h > a > b$, determiner pour chacun des axes x_1,x_2 et x_3 de la double pyramide si une rotation autour de cet axe est stable ou non.